

Medidas de Monge-Ampère à potencial Hölderiano e integrabilidade de funções p.s.h.

Lucas Kaufmann*, Alano Ancona

*IMJ-PRG

Resumo

Seja Ω um aberto do espaço euclidiano complexo \mathbb{C}^n . Uma função $\varphi : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty)$ é dita plurisubharmônica (p.s.h.) se φ é semicontínua superiormente e se para toda reta complexa $L \subset \Omega$ a função $\varphi|_{\Omega \cap L}$ é subharmônica, isto é, satisfaz a propriedade da sub-média. Exemplos básicos de funções p.s.h. são dados por $\varphi = \log |h|$ onde h é uma função holomorfa em Ω .

Dada uma função localmente integrável u podemos definir $dd^c u$, onde $d = \partial + \bar{\partial}$ e $d^c = \frac{i}{2\pi}(\bar{\partial} - \partial)$ são aplicados no sentido de distribuições. No caso de uma função p.s.h. localmente limitada podemos ainda definir os produtos

$$(dd^c u)^k = dd^c u \wedge \cdots \wedge dd^c u,$$

que são correntes com uma certa propriedade de positividade. Em particular $\mu = (dd^c u)^n$ é uma medida positiva chamada medida de Monge-Ampère associada a u . Este tipo de medida singular aparece por exemplo na teoria de sistemas dinâmicos à varias variáveis complexas.

O número de Lelong de uma função p.s.h. no ponto $a \in \Omega$ é definido por

$$\nu(\varphi; a) := \liminf_{z \rightarrow a, z \neq a} \frac{\varphi(z)}{\log |z - a|}$$

e dá informações sobre a singularidade da função φ no ponto a .

Um importante teorema de H. Skoda diz que se $\nu(\varphi; a) < 2$ então a função $e^{-\varphi}$ é integrável numa vizinhança de a com respeito à medida de Lebesgue. Esse resultado é básico, por exemplo, no estudo de ideais de germes de funções holomorfas, ligados a singularidades de variedades projetivas complexas.

Nesta exposição daremos uma generalização do resultado de Skoda no qual a medida de Lebesgue é substituída por uma medida de Monge-Ampère à potencial local Hölderiano. Mais precisamente, mostraremos que se u é uma função p.s.h. α -Hölderiana e $\mu =$

$(dd^c u)^n$ então a função $e^{-\varphi}$ é μ -integrável em torno dos pontos $a \in \Omega$ satisfazendo $\nu(\varphi; a) < \frac{2\alpha}{\alpha+n(2-\alpha)}$.

Este resultado fornece por exemplo uma estimativa da massa de μ nos conjuntos de subnível $\{\varphi \leq -M\}$ de uma função p.s.h. .

Este é um trabalho em conjunto com Alano Ancona (Univ. Paris-Sud) e foi realizado com o apoio da *Région Île-de-France*.